הרצאה מספר 1
אלגברה 1 מ 104016
הנושא: שדות

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

- קורס מספר 104016: אלגברה לינארית – קבוצה 30
- המרצה: דר. נתן ולך
- אתר הקורס:
  - http://moodle.technion.ac.il/course/view.php?id=970
  - סילבוס
  - דף מידע
    - נוהלים
    - הרכב הציון: ראה בדף מידע.
  - שעות קבלה וסדנאות
  - רשימות תפוצה
    - בעברית דרך מודל (חובה להיכנס פעם אחד עם סיסמא!)
    - באנגלית (listserv)

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

מה זה אלגברה ואלגברה ליניארית

אלגברה עוסקת בין השאר ב:

1. פתרון משוואות, למשל:
   - שורשים של פולינום: $x^3 + x = 0$
   - מערכת משוואות לינארית:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 3 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ x + 3y = -1 \\ x + 8y - 2z = -6 \end{cases}$$

2. תיאור מבני של אוסף הפתרונות.
3. מבנים של איברים ופעולות המקיימות אקסיומות.
4. חקירת הפונקציות בין מבנים כאלו ששומרים על המבנה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

פרק 1: שדות והמספרים המרוכבים

- **שדה** : אוסף של מספרים יחד עם פעולות חיבור וכפל בעלי תכונות מתאימות
- **המספרים המרוכבים** : שדה חשוב שבה נמצאים כל השורשים של כל פולינום ממשי (או מרוכב)
- **פולינומים** (בעיקר בטיפול המתרגלים)

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.1 שדות: פעולת החיבור ותכונותיה

- **פעולת החיבור:** $a+b$
- **סגירות:**
- **חילוף:** $a+b=b+a$
- **קיבוץ:** $(a+b)+c=a+(b+c)$
- **איבר אדיש (0):**
- **נגדי $(-a)$:**
- **פעולת החיסור:** $a-b=a+(-b)$

(פעולה נלווית לחיבור) אינה חילופית אינה קיבוצית

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.2 שדות: פעולת הכפל ותכונותיה

- **פעולת הכפל:** $a \cdot b$
- **סגירות:**
- **חילוף:** $a \cdot b = b \cdot a$
- **קיבוץ:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **איבר אדיש (1) היחידה:**
- **הופכי (a^{-1}):**
- **פעולת החילוק:** $a/b = a \cdot b^{-1}$

(פעולה נלווית לכפל) אינה חילופית אינה קיבוצית

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.3 הגדרת שדה וסיכום התכונות

הגדרה: **שדה (field)** היא קבוצה של איברים (מספרים) שעליו מוגדרות שתי פעולות: חיבור $(+)$ וכפל $(\cdot)$ המקיימות את התכונות הבאות:

	חיבור	כפל
סגירות	$a+b \in F$	$a \cdot b \in F$
חילוף	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
קיבוץ	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
איבר אדיש	$\exists 0 : \forall b : 0+b=b$	$\exists 1 : \forall b : 1 \cdot b = b$
נגדי/הופכי	$\forall a \exists (-a) : a+(-a)=0$	$\forall a \neq 0 \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$
פילוג	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	

שייך ל־ $\in$ $\quad a, b, c \in F$ כלשהם

לכל $\forall$ $\quad$ קיים $\exists$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.4 מה חסר במספרים הטבעיים?

- **הטבעיים:** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ אינו שדה
  - 0 חסר.
  - הנגדי חסר לכל מספר טבעי.
  - כלומר, אין יכולת לרשום או לפתור $a + x = 0$.
  - ההופכי חסר לכל מספר טבעי פרט ל־ 1.
  - התוצאה: חיסור וחילוק לא תמיד מוגדרים ב־ $\mathbb{N}$.

נעבור למספרים השלמים.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.4 מה חסר בשלמים?

- **הטבעיים:** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **אינו שדה**
- **השלמים:** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **אינו שדה**
  - 0 **נמצא.**
  - **הנגדי נמצא לכל מספר טבעי.**
  - **כלומר, לכל מספר** a **ניתן לפתור את המשוואה** $a + x = 0$.
  - **ההופכי חסר לכל מספר טבעי פרט ל־** ± 1.
  - **כלומר, בדרך כלל אין יכולת לפתור את** $ax = 1$.
  - **התוצאה: חילוק לא תמיד מוגדר ב־** $\mathbb{Z}$.

נעבור למספרים הרציונליים (שברים).

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.5 הרציונליים – שדה ראשון

- **הרציונליים:** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0 \right\}$ שדה
  - כל התכנות מתקיימות. לכן זה שדה.
  - $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ $\quad m = \frac{m}{1}$
  - לכל שבר יש אינסוף יצוגים:

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n} = \cdots$$

  - הגדרת שיוון: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ כאשר מתקיים $mq = np$.
  - שבר מצומצם

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.6 חזקות: חלק א

<u>הגדרה:</u> יהי $a \in \mathbb{F}$ (איבר בשדה $\mathbb{F}$),
יהי $n \in \mathbb{N}$ (מספר טבעי).
נגדיר:

$$\boxed{a^n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \cdots a}_{n \text{ פעמים}}$$

$$\boxed{a^{-n}} = \underbrace{(a^{-1}) \cdot (a^{-1}) \cdot \ \cdots (a^{-1})}_{n \text{ פעמים}}$$

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ גם ל־ m, n שלמים כאשר $a \neq 0$
- $a^{-n} \cdot a^n = 1$
- לכן $a^0 = 1$ לכל $a \neq 0$
- 0^0 אינו מוגדר

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות